BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№3 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2008

RİYAZİYYAT

О СУЩЕСТВОВАНИИ В МАЛОМ РЕШЕНИЯ ПОЧТИ ВСЮДУ ОДНОМЕРНОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА КОРТЕВЕГА-ДЕ ФРИЗА-БЮРГЕРСА

К.И.ХУДАВЕРДИЕВ, М.Н.САДЫХОВ

Институт Математики и Механики НАН Азербайджана

Работа посвящена доказательству существования в малом решения почти всюду одномерной смешанной задачи с граничными условиями типа Рикье для одного класса полулинейных дифференциальных уравнений типа Кортевега-де Фриза-Бюргерса пятого порядка. Введено понятие решения почти всюду изучаемой смешанной задачи. После применения метода Фурье решение исходной задачи сведено к решению некоторой счётной системы нелинейных интегральных уравнений относительно неизвестных коэффициентов Фурье искомого решения. Далее, комбинированием обобщённого принципа сжатых отображений с принципом Шаудера о неподвижной точке, доказана теорема существования в малом решения почти всюду рассматриваемой смешанной задачи.

В работе изучается вопрос существования в малом решения почти всюду следующей одномерной смешанной задачи:

$$\begin{cases} u_t(t,x)+\alpha u_{txxxx}(t,x)=F(t,x,u(t,x),u_x(t,x),u_{xx}(t,x),u_{xxx}(t,x),u_{xxxx}(t,x)) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad (0\le t\le T,\ 0\le x\le\pi), & (1) \\ u_t(0,x)=\varphi(x)\ \ (0\le x\le\pi), & (2) \\ u(t,0)=u(t,\pi)=u_{xx}(t,0)=u_{xx}(t,\pi)=0\ \ (0\le t\le T), & (3) \end{cases}$$

где $\alpha>0$ - фиксированная постоянная; $0<T<+\infty; F,\varphi$ - заданные функции, а $u(t,x)$ - искомая функция, причём под решением почти всюду задачи (1)-(3) понимаем следующее

Определение. Под решением почти всюду задачи (1)-(3) понимаем функцию $u(t,x)$, обладающую свойствами:

а) $u(t,x),u_x(t,x),u_{xx}(t,x),u_{xxx}(t,x),u_t(t,x),u_{tx}(t,x),u_{txx}(t,x),u_{txxx}(t,x)\in C([0,T]\times[0,\pi])$;

$u_{xxxx}(t,x),u_{txxxx}(t,x)\in C([0,T];L_2(0,\pi))$;

б) все условия (2) и (3) удовлетворяются в обычном смысле;

в) уравнение (1) удовлетворяется почти всюду в $(0,T)\times(0,\pi)$.

§1. Вспомогательные факты

С целью исследования задачи (1)-(3) приведём некоторые известные факты и установим ряд новых вспомогательных фактов.

1. Так как система $\{sinnx\}_{n=1}^{\infty}$ образует базис в пространстве $L_2(0,\pi)$, то очевидно, что каждое решение почти всюду задачи (1)-(3) имеет вид:

$$u(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t)sinnx\,, \tag{4}$$

где

$$u_n(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}u(t,x)sinnxdx \;\; (n=1,2,...;\; t\in[0,T])\,. \tag{5}$$

Тогда, после применения метода Фурье, нахождение функций $u_n(t)$ $(n=1,2,...)$ сводится к решению следующей счётной системы нелинейных интегральных уравнений типа Вольтерра:

$$u_n(t)=\varphi_n+\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{1+\alpha n^4}\cdot\int_0^t\int_0^{\pi}\text{☞}(u(t,x))sinnxdx \;\; (n=1,2,...;\; t\in[0,T])\,, \tag{6}$$

где

$$\varphi_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\varphi(x)\,sinnxdx \;\; (n=1,2,...)\,, \tag{7}$$

$$\text{☞}(u(t,x))\equiv F(t,x,u(t,x),u_x(t,x),u_{xx}(t,x),u_{xxx}(t,x),u_{xxxx}(t,x))\,. \tag{8}$$

2. Исходя из определения решения почти всюду задачи (1)-(3) легко доказывается следующая

Лемма. Если $u(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t)sinnx$ - любое решение почти всюду задачи (1)-(3), то функции $u_n(t)$ $(n=1,2,...)$ удовлетворяют системе (6).

3. Обозначим через $B^{\alpha_0,...,\alpha_l}_{\beta_0,...,\beta_l,T}$ совокупность всех функций $u(t,x)$ вида (4), рассматриваемых на $[0,T]\times[0,\pi]$, для которых все функции $u_n(t)\in C^{(l)}([0,T])$ и

$$J_T(u)\equiv\sum_{i=0}^{l}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^{\alpha_i}\cdot\max_{0\le t\le T}\left|u_n^{(i)}(t)\right|\right)^{\beta_i}\right\}^{\frac{1}{\beta_i}}<+\infty\,,$$

где $l\ge 0$ - целое число, $\alpha_i\ge 0$ $(i=\overline{0,l})$, $1\le\beta_i\le 2$ $(i=\overline{0,l})$. Норму в этом множестве определим так: $\|u\|=J_T(u)$. Известно (см.[1]), что все эти пространства банаховы.

В дальнейшем для функций $u(t,x)\in B^{\alpha_0,...,\alpha_l}_{\beta_0,...,\beta_l,T}$ будем пользоваться обозначениями:

$$\|u\|_{B^{\alpha_0,\dots,\alpha_l}_{\beta_0,\dots,\beta_l,t}} \equiv \sum_{i=0}^{l}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^{\alpha_i}\cdot\max_{0\le\tau\le t}\left|u_n^{(i)}(\tau)\right|\right)^{\beta_i}\right\}^{\frac{1}{\beta_i}} \quad (0\le t\le T). \tag{9}$$

4. Для функции $u(t,x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(t)\sin nx\in B^{\alpha_0,\dots,\alpha_l}_{\beta_0,\dots,\beta_l,T}$ функцию $u_n(t)$ назовём её n-той компонентой. Пусть 💣- любое непустое множество из пространства $B^{\alpha_0,\dots,\alpha_l}_{\beta_0,\dots,\beta_l,T}$. Совокупность n-тых компонент всех функций из 💣 обозначим через 💣$_n$. Справедлива (см.[1]) следующая

Теорема 1. Для компактности множества 💣 $\subset B^{\alpha_0,\dots,\alpha_l}_{\beta_0,\dots,\beta_l,T}$ в $B^{\alpha_0,\dots,\alpha_l}_{\beta_0,\dots,\beta_l,T}$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие два условия:
а) для каждого фиксированного n $(n=1,2,\dots)$ множество 💣$_n$ компактно в $C^{(l)}([0,T])$;
б) для любого $\varepsilon>0$ существует номер n_ε, один и тот же для всех

$u(t,x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(t)\sin nx\in$ 💣, такой, что

$$\sum_{i=0}^{l}\left\{\sum_{n=n_\varepsilon}^{\infty}\left(n^{\alpha_i}\cdot\max_{0\le t\le T}\left|u_n^{(i)}(t)\right|\right)^{\beta_i}\right\}^{\frac{1}{\beta_i}}<\varepsilon \qquad \forall u\in 💣.$$

5. Очевидно, что если $u(t,x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(t)\sin nx\in B^k_{2,T}$ $(k\ge 1$ - целое число), то $\forall t\in[0,T]$:

$$\|u\|_{B^{k-1}_{1,t}}\equiv\sum_{n=1}^{\infty}n^{k-1}\cdot\max_{0\le\tau\le t}|u_n(\tau)|\le\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\right)^{\frac12}\cdot\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^k\cdot\max_{0\le\tau\le t}|u_n(\tau)|\right)^2\right\}^{\frac12}=\frac{\pi}{\sqrt6}\cdot\|u\|_{B^k_{2,t}}. \tag{10}$$

6. Пусть $u(t,x)\equiv\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(t)\sin nx\in B^4_{2,T}$. Тогда, пользуясь оценкой (10) для $k=4$, $\forall t\in[0,T]$ и $x\in[0,\pi]$ имеем:

$$\left|\frac{\partial^i u(t,x)}{\partial x^i}\right|\le\sum_{n=1}^{\infty}n^i\cdot|u_n(t)|\le\sum_{n=1}^{\infty}n^i\cdot\max_{0\le\tau\le t}|u_n(\tau)|\le$$
$$\le\sum_{n=1}^{\infty}n^3\cdot\max_{0\le\tau\le t}|u_n(\tau)|=\|u\|_{B^3_{1,t}}\le\frac{\pi}{\sqrt6}\cdot\|u\|_{B^4_{2,t}} \quad (i=\overline{0,3}). \tag{11}$$

Из оценок (11) и структуры пространства $B^4_{2,T}$ следует, что

$$u(t,x),u_x(t,x),u_{xx}(t,x),u_{xxx}(t,x)\in C([0,T]\times[0,\pi]). \tag{12}$$

Кроме того, очевидно, что $\forall t\in[0,T]$:

$$\int_0^\pi u_{xxxx}^2dx=\frac{\pi}{2}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^4\cdot u_n(t)\right)^2\le\frac{\pi}{2}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^4\cdot\max_{0\le\tau\le t}|u_n(\tau)|\right)^2=\frac{\pi}{2}\cdot\|u\|_{B^4_{2,t}}. \tag{13}$$

Отсюда, в силу структуры пространства $B^4_{2,T}$, следует, что

$$u_{xxxx}(t,x) \in C([0,T];L_2(0,\pi)) \ . \tag{14}$$

Далее, пользуясь соотношениями (11)-(13) и известными свойствами оператора Немыцкого, доказана следующая

Теорема 2. Пусть

1. $F(t,x,u_1,...,u_5) \in C\left([0,T]\times[0,\pi]\times(-\infty,\infty)^5\right)$.
2. $\forall R>0$ в $[0,T]\times[0,\pi]\times[-R,R]^4\times(-\infty,\infty)$

$$\left|F(t,x,u_1,...,u_5)\right| \le C_R\cdot\left(1+|u_5|\right), \tag{15}$$

где $C_R>0$ - постоянная.

Тогда:

а) $\forall u\in B^4_{2,T}$ $F(t,x,u(t,x),u_x(t,x),u_{xx}(t,x),u_{xxx}(t,x),u_{xxxx}(t,x)) \equiv$

$$\equiv \mathcal{F}(u(t,x)) \in C([0,T];L_2(0,\pi))\,; \tag{16}$$

б) $\forall u\in B^3_{1,T}, V\in B^4_{2,T}$ $F(t,x,u(t,x),u_x(t,x),u_{xx}(t,x),u_{xxx}(t,x),V_{xxxx}(t,x)) \equiv$

$$\equiv \mathcal{F}_u(V(t,x)) \in C([0,T];L_2(0,\pi))\,. \tag{17}$$

7. Пусть для натурального числа k:

$$\varphi(x)\in C^{(k-1)}([0,\pi]),\ \varphi^{(k)}(x)\in L_2(0,\pi),\ \varphi^{(2s)}(0)=\varphi^{(2s)}(\pi)=0\ \left(s=\overline{0,\left[\frac{k-1}{2}\right]}\right). \tag{18}$$

Тогда, с помощью интегрирования по частям, пользуясь неравенством Бесселя (для нечётного k) и равенством Парсевалля (для чётного k), легко получается, что

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^k\cdot\varphi_n\right)^2 \le \frac{2}{\pi}\cdot\left\|\varphi^{(k)}(x)\right\|^2_{L_2(0,\pi)}, \tag{19}$$

где числа φ_n $(n=1,2,...)$ определены соотношением (7), причём очевидно, что оценка (19) верна и при $k=0$, если $\varphi(x)\in L_2(0,\pi)$.

8. В заключение параграфа условимся всюду в этой работе считать все величины вещественными, все функции действительнозначными, а интегралы всюду понимать в смысле Лебега.

§2. Исследование единственности решения почти всюду задачи (1)-(3)

В работе [2], с помощью неравенства Беллмана, доказана теорема о единственности в целом решения почти всюду задачи (1)-(3). Ради полноты изложения, приведём её формулировку:

Теорема 3. Пусть

1. $F(t,x,u_1,...,u_5) \in C\left([0,T]\times[0,\pi]\times(-\infty,\infty)^5\right)$.
2. $\forall R>0$ в $[0,T]\times[0,\pi]\times[-R,R]^4\times(-\infty,\infty)$

$$|F(t,x,u_1,...,u_5)-F(t,x,\tilde{u}_1,...,\tilde{u}_5)|\le C_R\cdot\sum_{i=1}^{5}|u_i-\tilde{u}_i|, \qquad (20)$$

где $C_R>0$ - постоянная.

Тогда задача (1)-(3) не может иметь более одного решения почти всюду.

§3. Исследование существования в малом решения почти всюду задачи (1)-(3)

В этом параграфе, комбинированием обобщённого принципа сжатых отображений с принципом Шаудера о неподвижной точке, доказывается следующая теорема существования в малом (т.е. справедливая при достаточно малых значениях T) решения почти всюду задачи (1)-(3).

Теорема 4. Пусть

1. $\varphi(x)\in C^{(3)}([0,\pi])$, $\varphi^{(4)}(x)\in L_2(0,\pi)$ и $\varphi(0)=\varphi(\pi)=\varphi''(0)=\varphi''(\pi)=0$.
2. $F(t,x,u_1,...,u_5)\in C([0,T]\times[0,\pi]\times(-\infty,\infty)^5)$.
3. $\forall R>0$ в $[0,T]\times[0,\pi]\times[-R,R]^4\times(-\infty,\infty)$

$$|F(t,x,u_1,...,u_4,u_5)-F(t,x,u_1,...,u_4,\tilde{u}_5)|\le C_R\cdot|u_5-\tilde{u}_5|, \qquad (21)$$

где $C_R>0$ - постоянная.

Тогда существует в малом решение почти всюду задачи (1)-(3).

Доказательство. Для каждого фиксированного $u\in B^3_{1,T}$ определим в $B^4_{2,T}$ оператор (относительно V) $\mathcal{P}_u$:

$$\mathcal{P}_u(V(t,x))=\tilde{V}(t,x)\equiv\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{V}_n(t)\sin nx, \qquad (22)$$

где

$$\tilde{V}_n(t)=\varphi_n+\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{1+\alpha n^4}\cdot\int_0^t\int_0^\pi \Phi_u(V(\tau,x))\sin nx\,dx\,d\tau \quad (n=1,2,...;\,t\in[0,T]), \qquad (23)$$

числа φ_n $(n=1,2,...)$ определены соотношением (7) и

$$\Phi_u(V(t,x))\equiv F(t,x,u(t,x),u_x(t,x),u_{xx}(t,x),u_{xxx}(t,x),V_{xxxx}(t,x)). \qquad (24)$$

Очевидно, что

$$\forall u\in B^4_{2,T}\ \ \Phi_u(u(t,x))=\mathcal{F}(u(t,x)), \qquad (25)$$

где оператор $\mathcal{F}$ определён соотношением (8).

Из (23) получаем, что при любом фиксированном $u\in B^3_{1,T}$ $\forall V\in B^4_{2,T}$:

$$\|\mathcal{P}_u(V)\|^2_{B^4_{2,T}}=\|\tilde{V}(t,x)\|^2_{B^4_{2,T}}\equiv\left\|\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{V}_n(t)\sin nx\right\|^2_{B^4_{2,T}}\le a_0+\frac{\pi T}{\alpha^2}\cdot\int_0^T\int_0^\pi\{\Phi_u(V(\tau,x))\}^2dx\,d\tau, \qquad (26)$$

где

$$a_0 \equiv 2\sum_{n=1}^{\infty}(n^4\cdot\varphi_n)^2\,, \tag{27}$$

причём конечность a_0 следует из (19) для $k=4$.

Так как, по теореме 2, $\mathcal{F}_u(V(t,x))\in C([0,T];L_2(0,\pi))$, то из (26) следует, что для любого фиксированного $u\in B^3_{1,T}$ оператор $\mathcal{P}_u$ действует в пространстве $B^4_{2,T}$.

Далее, в силу оценок (11), $\forall u\in B^3_{1,T}$ существует такое число $R_u>0$, что $\forall t\in[0,T]$ и $x\in[0,\pi]$:

$$-R_u\le u(t,x),u_x(t,x),u_{xx}(t,x),u_{xxx}(t,x)\le R_u\,. \tag{28}$$

Теперь, пользуясь соотношениями (22)-(24), имея в виду (28), пользуясь неравенством (21) для $R=R_u$ и оценкой (13) для $u=V_1-V_2$, аналогично (26) получаем, что при любом фиксированном $u\in B^3_{1,T}$ $\forall V_1,V_2\in B^4_{2,T}$ и $t\in[0,T]$:

$$\begin{aligned}\left\|\mathcal{P}_u(V_1)-\mathcal{P}_u(V_2)\right\|^2_{B^4_{2,t}} &\le \frac{\pi T}{\alpha^2}\cdot\int_0^t\int_0^\pi\{\mathcal{F}_u(V_1(\tau,x))-\mathcal{F}_u(V_2(\tau,x))\}^2dxd\tau\le\\ &\le\frac{\pi T}{\alpha^2}\cdot C^2_{R_u}\cdot\int_0^t\int_0^\pi\{V_{1,xxxx}(\tau,x)-V_{2,xxxx}(\tau,x)\}^2dxd\tau\le\\ &\le\frac{\pi T}{\alpha^2}\cdot C^2_{R_u}\cdot\frac{\pi}{2}\int_0^t\left\|V_1-V_2\right\|^2_{B^4_{2,\tau}}d\tau\le\\ &\le\frac{\pi^2 T}{2\alpha^2}\cdot C^2_{R_u}\cdot\left\|V_1-V_2\right\|^2_{B^4_{2,T}}\cdot t\end{aligned}$$

……………………………………………………………………………………………

$$\left\|\mathcal{P}^k_u(V_1)-\mathcal{P}^k_u(V_2)\right\|^2_{B^4_{2,t}}\le\left(\frac{\pi^2T}{2\alpha^2}\cdot C^2_{R_u}\right)^k\cdot\left\|V_1-V_2\right\|^2_{B^4_{2,T}}\cdot\frac{t^k}{k!}, \tag{29}$$

где k - любое натуральное число.

Таким образом, при любом фиксированном $u\in B^3_{1,T}$ $\forall V_1,V_2\in B^4_{2,T}$:

$$\left\|\mathcal{P}^k_u(V_1)-\mathcal{P}^k_u(V_2)\right\|_{B^4_{2,T}}\le q_k(u)\cdot\left\|V_1-V_2\right\|^2_{B^4_{2,T}}, \tag{30}$$

где

$$q_k(u)\equiv\frac{1}{\sqrt{k!}}\cdot\left(\frac{\pi^2T^2}{2\alpha^2}\cdot C^2_{R_u}\right)^{\frac{k}{2}}. \tag{31}$$

Очевидно, что для достаточно больших $k=k_u: q_k(u)<1$. Для таких k оператор $\mathcal{P}^k_u$ оказывается сжатым в пространстве $B^4_{2,T}$. Тогда, в силу обобщённого принципа сжатых отображений, единственная в $B^4_{2,T}$ неподвижная точка V оператора $\mathcal{P}^k_u$ является и единственной в $B^4_{2,T}$ неподвижной точкой оператора $\mathcal{P}_u$:

$$V=\mathcal{P}_u(V),\ V\in B^4_{2,T}\,. \tag{32}$$

Сопоставив каждому $u \in B_{1,T}^3$ единственную в $B_{2,T}^4$ неподвижную точку V оператора Φ_u порождаем оператор H:

$$H(u) = V = \Phi_u(V), \tag{33}$$

действующий из $B_{1,T}^3$ в $B_{2,T}^4$.

Далее, показывается, что оператор H действует из $B_{1,T}^3$ в $B_{2,T}^4$ непрерывно и, тем более, он действует в $B_{1,T}^3$ непрерывно.

Теперь покажем компактность оператора H в $B_{1,T}^3$. Пусть $K = K_R$ - любой замкнутый шар пространства $B_{1,T}^3$ радиуса R и с центром в нуле. Тогда, в силу (11), очевидно, что при любом $u \in K_R$ $\forall t \in [0,T]$ и $x \in [0,\pi]$:

$$-R \le u(t,x), u_x(t,x), u_{xx}(t,x), u_{xxx}(t,x) \le R. \tag{34}$$

Тогда, пользуясь неравенством (21) и оценкой (13) для $u = V$, аналогично (26) получаем, что при любом $u \in K_R$ $\forall t \in [0,T]$:

$$\|H(u)\|_{B_{2,t}^4}^2 \equiv \|V\|_{B_{2,t}^4}^2 \equiv \|\Phi_u(V)\|_{B_{2,t}^4}^2 \le a_0 + \frac{\pi T}{\alpha^2} \cdot \int_0^t \int_0^\pi \{\varphi_u(V(\tau,x))\}^2 dx d\tau \le$$

$$\le a_0 + \frac{2\pi T}{\alpha^2} \cdot \int_0^t \int_0^\pi \left\{ [\varphi_u(V(\tau,x)) - \varphi_u(0)]^2 + [\varphi_u(0)]^2 \right\} dx d\tau \le$$

$$\le a_0 + \frac{2\pi T}{\alpha^2} \cdot C_R^2 \cdot \int_0^t \int_0^\pi V_{xxxx}^2(\tau,x) dx d\tau + \frac{2\pi T}{\alpha^2} \cdot \|\varphi_u(0)\|_{C(Q_T)}^2 \cdot \pi t \le$$

$$\le a_0 + \frac{2\pi^2 T^2}{\alpha^2} \cdot M_R^2 + \frac{2\pi T}{\alpha^2} \cdot C_R^2 \cdot \frac{\pi}{2} \int_0^t \|V\|_{B_{2,\tau}^4}^2 d\tau, \tag{35}$$

где число a_0 определено соотношением (27), $Q_T \equiv [0,T] \times [0,\pi]$, а M_R - максимум функции $|F(t,x,u_1,u_2,u_3,u_4,0)|$ в замкнутой области $0 \le t \le T$, $0 \le x \le \pi$, $-R \le u_1, u_2, u_3, u_4 \le R$.

Из (35), применив неравенство Беллмана, получаем, что $\forall u \in K_R$:

$$\|H(u)\|_{B_{2,T}^4}^2 \equiv \|V\|_{B_{2,T}^4}^2 \le \left(a_0 + \frac{2\pi^2 T^2}{\alpha^2} \cdot M_R^2 \right) \cdot exp\left\{ \frac{\pi^2 T}{\alpha^2} \cdot C_R^2 \cdot T \right\} \equiv a_R^2. \tag{36}$$

Следовательно, множество $H(K_R)$ ограничено в $B_{2,T}^4$.

Далее, показывается, что $\forall u \in K_R$:

$$\max_{0 \le t \le T} \left| \int_0^\pi \varphi_u(V(t,x)) \sin nx dx \right| \le \pi \cdot \left(C_R^2 \cdot a_R^2 + 2 M_R^2 \right)^{\frac{1}{2}} \equiv b_R \ (n = 1,2,\dots), \tag{37}$$

$$\int_0^T\int_0^\pi \{\text{✎}_u(V(\tau,x))\}^2 dxd\tau \le \pi T\cdot\left(C_R^2\cdot a_R^2+2\text{✌}_R^2\right)\equiv c_R^2, \tag{38}$$

$$\left\|(H(u))_t\right\|^2_{B^3_{2,T}} \equiv \left\|V_t\right\|^2_{B^3_{2,T}} \equiv \left\|\sum_{n=1}^{\infty} V_n'(t)sinnx\right\|^2_{B^3_{2,T}} \equiv \sum_{n=1}^{\infty}\left(n\cdot \max_{0\le t\le T}\left|V_n'(t)\right|\right)^2 \le \frac{2}{3\alpha^2}\cdot b_R^2 \equiv d_R^2. \tag{39}$$

Таким образом, из (36) и (39) следует, что

$$\forall u\in \text{☹}_R \quad \left\|H(u)\right\|^2_{B^{4,3}_{2,2,T}} \equiv \left\|V\right\|_{B^{4,3}_{2,2,T}} = \left\|V\right\|_{B^4_{2,T}} + \left\|V_t\right\|_{B^3_{2,T}} \le a_R + d_R \equiv e_R. \tag{40}$$

Следовательно, множество $H(\text{☹}_R)$ ограничено в $B^{4,3}_{2,2,T}$. Отсюда, по теореме 1, следует, что множество $H(\text{☹}_R)$, рассматриваемое как подмножество пространства $B^3_{1,T}$, компактно в $B^3_{1,T}$. Таким образом, оператор H действует в $B^3_{1,T}$ компактно. Так как оператор H действует в $B^3_{1,T}$ и непрерывно, то он действует в $B^3_{1,T}$ вполне непрерывно.

Далее, в силу (10) для $k=4$ и (36), $\forall u\in \text{☹}_R$ имеем:

$$\left\|H(u)\right\|_{B^3_{1,T}} \le \frac{\pi}{\sqrt{6}}\cdot\left\|H(u)\right\|_{B^4_{2,T}} \le \frac{\pi}{\sqrt{6}}\cdot a_R = \frac{\pi}{\sqrt{6}}\cdot\left(a_0+\frac{2\pi^2T^2}{\alpha^2}\cdot\text{✌}_R^2\right)\cdot exp\left\{\frac{\pi^2T^2}{2\alpha^2}\cdot C_R^2\right\}. \tag{41}$$

Из (41) видно, что если число

$$R>\frac{\pi}{\sqrt{6}}\cdot\sqrt{a_0} \tag{42}$$

и фиксировано, то при достаточно малых значениях T

$$\forall u\in \text{☺}_R \quad \left\|H(u)\right\|_{B^3_{1,T}} \le R,$$

т.е. $H(\text{☹}_R)\subset \text{☹}_R$.

Таким образом, для любого фиксированного R, удовлетворяющего условию (42), при достаточно малых значениях T оператор H преобразует шар ☹_R в себя вполне непрерывно. Следовательно, в силу принципа Шаудера о неподвижной точке, при достаточно малых значениях T оператор H имеет в ☹_R по крайней мере одну неподвижную точку $u: u=H(u)$. Так как $u=H(u)=V=\text{⚐}_u(V)$, то $u=V$ и, следовательно, $u=H(u)=\text{⚐}_u(u)$, причём, в силу (40), $u(t,x)\in B^{4,3}_{2,2,T}$. Кроме того, дополнительно показывается, что

$$u_{txxxx}(t,x)\in C([0,T];L_2(0,\pi)). \tag{43}$$

Далее, в силу $u=V$ и (25), для найденной неподвижной точки $u(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t)sinnx$ функции $u_n(t)$ $(n=1,2,...)$ удовлетворяют системе (6). Пользуясь этим, показывается, что функция

$$u(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(t)sinnx\in B^{4,3}_{2,2,T}, \tag{44}$$

обладающая ещё свойством (43), является решением почти всюду задачи (1)-(3). Теорема доказана.

Замечание 1. Следует отметить, что условие 1 теоремы 4, наложенное на начальную функцию $\varphi(x)$, не только достаточно, но и необходимо для существования решения почти всюду задачи (1)-(3).

Замечание 2. Отметим, что при условиях 2 и 3 теоремы 4 для её доказательства нам не удалось (вообще говоря) в отдельности применить ни принцип сжатых отображений, ни принцип Шаудера, и принцип Красносельского (являющийся обобщёнием предыдущих двух принципов), ни обобщённый принцип сжатых отображений и ни усиленный принцип Шаудера. Однако, в данной работе специальное комбинирование обобщённого принципа сжатых отображений с принципом Шаудера позволило нам доказать теорему 4 и, тем самым, гарантировать существование в малом решения почти всюду задачи (1)-(3).

ЛИТЕРАТУРА

1. Худавердиев К.И. К теории многомерных смешанных задач для нелинейных гиперболических уравнений. – Дис…докт.физ.-мат.наук, Баку, 1973г., Азербайджанский Государственный Университет, 319 с.
2. Sadikhov Mehman N. Investigation of uniqueness of almost everywhere solution of one-dimensional mixed problem for one non-linear equation of Cortevegue-de Vries-Burgers type. – Proceedings of Institute of Mathematics and Mechanics, v. XXVIII (XXXVI), 2008.

KORTEVEQ-DE FRİZ-BYURQERS TİPLİ BİR SİNİF QEYRİ-XƏTTİ TƏNLİKLƏR ÜÇÜN BİRÖLÇÜLÜ QARIŞIQ MƏSƏLƏNİN SANKİ HƏR YERDƏ HƏLLİNİN LOKAL VARLIĞI HAQQINDA

K.İ.XUDAVERDİYEV, M.N.SADIXOV

XÜLASƏ

İş bir sinif Korteveq-de Friz-Byurqers tipli beşinci tərtib yarımxətti diferensial tənliklər üçün birölçülü Rikye tipli sərhəd şərtli qarışıq məsələnin sanki hər yerdə həllinin lokal varlığının isbatına həsr olunmuşdur. Öyrənilən qarışıq məsələnin sanki hər yerdə həllinə tərif verilir. Baxılan məsələnin həlli Furye metodunu tətbiq etdikdən sonra axtarılan həllin naməlum Furye əmsallarına nəzərən müəyyən hesabi qeyri-xətti inteqral tənliklər sisteminin həllinə gətirilir. Ümumiləşmiş sıxılmış inikas prinsipini tərpənməz nöqtə haqqında Şauder prinsipilə kombinasiya etməklə baxılan qarışıq məsələnin sanki hər yerdə həllinin lokal varlığı haqqında teorem isbat edilir.

ON THE EXISTENCE IN SMALL OF ALMOST EVERYWHERE SOLUTION OF ONE-DIMENSIONAL MIXED PROBLEM FOR ONE CLASS OF NON-LINEAR EQUATIONS OF CORTEVEGUE-DE VRIES-BURGERS TYPE

K.I.KHUDAVERDIYEV, M.N.SADIKHOV

SUMMARY

This work is dedicated to the proof of existence in small of almost everywhere solution for one-dimensional mixed problem with Ricquier type boundary conditions for one class of fifth order semi-linear differential equations of Cortevegue-de Vries-Burgers type. Conception of almost everywhere solution for mixed problem under consideration is introduced. After ap-

plying Fourier method, the solution of original problem is reduced to the solution of some countable system of non-linear integral equations in unknown Fourier coefficients of the sought solution. Besides, existence theorem in small for the almost everywhere solution of the mixed problem under consideration are also proved in this work.